OTKA T043758:

szakmai zárójelentés 2003–2006

A projekt keretében a terveknek megfelelően véges terek és síkok íveivel, süvegeivel és lefogó ponthalmazaival, valamint poláris terek nevezetes ponthalmazaival kapcsolatban folytattunk kutatásokat. A tervekhez képest annyi hangsúlyeltolódás történt, hogy a klasszikusabb struktúrákban adódott több eredmény. A tervek szerint vizsgáltuk gráfok sajátértékeit és speciális loopokat is.

Barát János több társszerzővel számítógéppel belátta, hogy PG$(5,3)$-ban minden 49 pontú süveg része 56 pontúnak. Ennek segítségével megmutatták, hogy $m_2(6,3) \leq 136$. Így azt tudhatjuk, hogy $112 \leq m_2(6,3) \leq 136$. Stefano Innamoratival konstruáltak olyan 15 pontú lefogó ponthalmazt a 8-adrendű síkon, amelynek csak rövid egyenesei vannak. Ugyanakkor itt nyitva maradt az a kérdés, hogy van-e olyan 15 elemű blokkoló halmaz, amely minden egyenest legfeljebb 4 pontban metsz.

Barát János, Fernanda Pambianco, Stefano Marcugini és **Szőnyi Tamás** projektív síkok diszjunkt lefogó ponthalmazait vizsgálták, és adtak részleges választ M. Kriesell egy kérdésére. Korábban Beutelspacher és Eugeni csak $\sqrt[3]{q}$ nagyságrendű diszjunkt lefogó halmaz létezését tudta belátni. Tetszőleges síkon véletlen módszerekkel $q/\log q$, testre épített síkon nagyjából $q/3$ ilyen diszjunkt lefogót tudtunk megadni.

Barát János gráfparaméterek és geometriák kapcsolatával is foglalkozott. Tegyük fel, hogy előre adott k darab síkbeli meredekség. Ekkor a síkon adott n pont meghatároz egy gráfot, ahol két csúcs akkor és csak akkor van összekötve, ha a két pont által meghatározott egyenes meredeksége a rögzített k meredekség között van. Egy adott gráf esetén vizsgálhatjuk a szükséges meredekségek minimális számát. Adott G gráfra jelölje ezt $sl(G)$.

Alapkérdés volt, hogy milyen összefüggés van $sl(G)$ és a csúcsszám között. Tudtuk, hogy vannak olyan gráfok, amelyekre $sl(G) = c \cdot n$. A következőket sikerült megmutatni:

Tétel. *(Barát, Matoušek, Wood) Minden* $0 < \varepsilon$, *és elegendően nagy* n *esetén létezik olyan* n *csúcsú* G *gráf, amelyre*

$$sl(G) > \frac{n^2}{(4+\varepsilon)\log n},$$

valamint

Tétel. *(Barát, Matoušek, Wood) Ha* $\Delta > 9$ *és* n *elég nagy, akkor minden* $0 < \varepsilon$ *esetén létezik olyan* Δ*-reguláris,* n *csúcsú* G *gráf, amelyre*

$$sl(G) > \frac{1}{4}((1-\varepsilon)\Delta - 8)n.$$

Ugyancsak vizsgáltuk a diszjunkt lefogó ponthalmazok létezését magasabb dimenzióban is. Itt viszonylag sok erőfeszítés ellenére sem sikerült általánosítani a konstrukciót, a véletlen módszer azonban erre az esetre is működik.

Fancsali Szabolcs Sziklai Péterrel közösen a $\mathrm{PG}(8,q)$ projektív térben konstruált különböző deficienciájú maximális parciális sík-befedéseket. Az általuk konstruált parciális sík-befedés deficienciája $\delta = (k-1)\cdot q^2$, ahol $k \leq q^2+q+1$ és $\delta = k\cdot q^2 + l\cdot(q^2-1)+1$, ahol $k+l \leq q^2$ és $\delta = (k+1)\cdot q^2 + l\cdot(q^2-1) + m\cdot(q^2-2)+1$, ahol $k+l+m \leq q^2$. Ezen eredmények felhasználásával $\mathrm{PG}(3m-1,q)$ projektív térben is konstruáltak maximális parciális sík-befedéseket, különféle deficienciákkal.

Fancsali Szabolcs Leo Storme-val és munkatársaival a desarguesi síkok incidenciamátrixa által definiált kódok kódszavainak lehetséges súlyait vizsgálta. A $\mathrm{PG}(2,q=p^h)$ sík definiálta C kód $c \in C\cap C^{\perp}$ $[q+2,2q-1]$ intervallumba eső súlyú kódszavai által meghatározott ponthalmazok minimális lefogó halmazok, melyek minden egyenest 1 mod p pontban metszenek. A $\mathrm{PG}(2,p^3)$ esetben a Sziklai Péterrel írt fenti cikkünkben definiált „club"-ok segítségével ki tudtuk zárni a $[p^3+2,2p^3-1]$ intervallumba eső súlyok lehetőségét ($p \geq 7$). Általában pedig $\mathrm{PG}(2,q=p^h)$ esetén ki tudtuk zárni a $[\frac{3q}{2},2q-1]$ intervallumba eső súlyok lehetőségét és adtunk egy diszkrét spektrumot a $[q+2,\frac{3q}{2}]$ intervallumba eső lehetséges súlyokra.

Gács András megmutatta, hogy egy p-elemű ponthalmaz $\mathrm{AG}(2,p)$-ben vagy egyenes vagy az $x^{\frac{p+1}{2}}$ függvény grafikonja vagy legalább $2p/3$ irányt határoz meg.

Gács András, Mengyán Csaba, Szőnyi Tamás és Weiner Zsuzsa társzerzőikkel (Antonello Cossidente és Alessandro Siciliano) nagy méretű minimális lefogó ponthalmazokat vizsgáltak projektív síkokon. Néhány új konstrukció mellett sűrűségi tételeket bizonyítottak és nem négyzet rendű síkokon megjavították a Bruen-Thas felső becslést a legnagyobb minimális lefogó ponthalmaz méretéről. A sűrűségi eredmény az alábbi.

Tétel. *Ha q négyzet, akkor* $\mathrm{PG}(2,q)$*-ban a* $[4q\log(q), q\sqrt{q}-q+2\sqrt{q}]$ *intervallumban minden értékhez van olyan méretű minimális lefogó ponthalmaz.*

A konstrukció Buekenhout híres unitál-konstrukcióját általánosítja. A konstrukciót azóta többen is használták némileg általánosítva, elsősorban Polverino, Mazzocca, valamint Storme.

Gács András, Sziklai Péter és **Weiner Zsuzsa** (társsz.: S. Ball és A. Blokhuis) alsó becslést adtak azon ponthalmaz méretére $PG(n,q)$-ban, mely minden hipersíkot r (mod) p pontban metsz, ahol $1<r<q$ rögzített. Konstrukciót is adtak, mely $q=p^2$ esetén a becslés élességét adja. Az $n=2$, q páratlan eset egyben új és egyszerűbb bizonyítást ad arra a Ball-Blokhuis-Mazzocca tételre, mely szerint páratlan rendű testre épített projektív síkon nincsenek maximális ívek. A cikk eredményei a következő kódelméleti tételt adják: ha egy lineáris $[n,k]_q$ kódra igaz, hogy a hosszát és minden szó súlyát osztja egy $r<q$ konstans és a duális kód minimális távolsága legalább 3, akkor a kód hosszára $n\geq(r-1)q+(p-1)r$ teljesül. $q=p^2$ esetén vannak is ilyen kódok.

Gács András (társszerző J. De Beule) megmutatta, hogy a $Q(4,q)$ általánosított négyszögben nincsenek q^2-1 méretű maximális parciális ovoidok, ha q nem prím. $q<13$ prím esetén ismertek példák. Korábbi eredményekkel összevetve ez azt adja, hogy a (q^2+1 méretű) ovoidok utáni legnagyobb példák mérete legfeljebb q^2-3.

Gács András igazolta a következőt.

Tétel *Az oválisokon és unitálokon kívül nincsenek olyan ponthalmazok* $PG(2,q)$*-ban, melyek minden egyenest* $0,1$ *vagy* r *pontban metszenek és melyek minden pontján pontosan egy érintő megy.*

Ezt a kilencvenes évek elején Blokhuis és Szőnyi sejtette.

Gács András és **Sziklai Péter** (társszerző: S. Ball) a klasszikus irány-probléma alábbi háromdimenziós általánosítását vizsgálták: egy p elemű ponthalmaz $AG(3,p)$-ben nem határoz meg egy végtelen távoli egyenest, ha minden olyan sík, melynek ez az egyenes a végtelen távoli egyenese, egy pontban metszi a kérdéses halmazt. A cikkben nagysárendileg éles becslést adnak a szerzők arra, hogy hány egyenest kell meghatározzon egy nem síkbeli p elemű ponthalmaz, ha p prím. A permutáció polinomok nyelvén az eredmény azt adja, hogy ha f, g polinomok a $GF(p)$ véges test felett, melyekre nem teljesül $f(x) = cg(x) + dx + e$, akkor legfeljebb $2p^2/9$ olyan (c, d) pár van, melyre $f(x) + cg(x) + dx$ permutáció.

Gács András és **Szőnyi Tamás** áttekintő cikket írtak arról a módszerről, mellyel korábban sűrűségi tételeket sikerült bizonyítaniuk maximális parciális egyenesfedésekről és minimális blokkoló halmazokról.

Harrach Nóra előkészületben lévő dolgozatban **Szőnyi Tamással és Weiner Zsuzsával** $\mathrm{PG}(n, q^3)$ kis méretű, minimális, egyeneseket lefogó ponthalmazait irják le. Jelenleg az eredmények n-dimenziós általánosításán dolgoznak.

A Mőbius síkok lefogó ponthalmazairól nagyon kevés dolog ismert. Tudjuk, hogy q-adrendű síkon létezik $K \log q \cdot q$ pontú lefogó ponthalmaz, azonban semmilyen általános konstrukció nem ismert. **Kiss**, Marcugini és Pambianco megmutatták, hogy ha a q-adrendű síkon valamely $\mathcal{S}$ lefogó ponthalmaznak $2q + C$ pontja van (C rögzített), akkor $\mathcal{S}$-et a sík majdnem minden köre 1 vagy 4 pontban metszi. Számítógép segítségével karakterizálták az összes lefogó ponthalmazt $q < 8$ esetén, valamint példákat konstruáltak $q < 13$ esetén. A példák azt sejtetik, hogy a legkisebb lefogó ponthalmaz mérete $cq \log q$ nagyságrendű.

Projektív sík egy nemüres S ponthalmazát *szemioválisnak* nevezzük, ha minden $P \in S$ pont esetén pontosan egy olyan ℓ egyenes létezik, melyre $S \cap \ell = \{P\}$. A klasszikus példák szemioválisokra egyrészt a polaritásokkal (oválisok és unitálok), másrészt a lefogó ponthalmazokkal (projektív háromszög) vannak kapcsolatban. A szemioválisok tanulmányozását kriptográfiai alkalmazásaik is motiválják. **Kiss György** olyan szemioválisok méretével és struktúrájának leírásával kapcsolatban ért el új eredményeket, melyeknek van hosszú szelőjük. Fő eredménye a következő:

Tétel. *Legyen S szemioválís a $PG(2, q)$ síkon, t és k pedig nemnegatív egészek. Ha S-nek van egy $(q - t)$-szelője, $|S| < 2q - t + k$, $2t < q$ és $t + 4(k+1) < q$, akkor a $(q-t)$-szelő pontjaiban S-hez húzott érintők egy ponton mennek át. Speciálisan, ha $t = 1$, akkor S megkapható egy csúcsnélküli háromszögből úgy, hogy annak egy oldaláról néhány pontot elhagyunk.*

Kiss György és Ruff János teljes leírást adtak azokról a szemioválisokról, melyeket tartalmaz a sík két, illetve három egyenese, legalábbis ha ez a három egyenes nem megy át egy ponton.

Aart Blokhuis, **Kiss György**, **Kovács István**, Aleksandr Malnić, Dragan Marušić és **Ruff János** a kimaradó esetet, azaz olyan szemioválisokat vizsgáltak, melyeket három, egy ponton átmenő egyenes tartalmaz. Megmutatták, hogy néhány egyéb feltétel teljesülése esetén a $\mathrm{PG}(2,p)$ ($p > 2$ prím) síkokon nincsenek ilyen szemioválisok, a prímnégyzet rendű síkokon pedig teljesen leírták az ún. erős szemioválisokat.

Kovács István szűkebb kutatási témái: Cayley gráfok, ciklikus gráfok, asszociációs sémák, véges geometriák.

A Γ irányított vagy irányítatlan, egyszerű gráf egy H csoport Cayley gráfja, ha a teljes automorfizmus-csoport $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ tartalmaz egy, a H-val izomorf reguláris részcsoportot. Ha H ciklikus (jel.: C_n), akkor Γ-át röviden ciklikus gráfnak nevezzük. Vizsgálataink egyik fő iránya a ciklikus gráfok automorfizmus-csoportjainak osztályozása. Teljes osztályozás csak az $n = p^e$ esetben ismert, ahol p prím, $p > 2$.

Kutatásaink során a következő eredményeket kaptuk: (1) Él-tranzitív ciklikus gráfok teljes osztályozása. (2) Racionális ciklikus gráfok automorfizmus-csoportjainak leírása (egy gráf racionális, ha minden sajátértéke racionális).

Legyen $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ egy asszociációs séma (röviden séma). $\mathrm{Aut}(\mathcal{X}) = \cap_{i=0}^d \mathrm{Aut}((X, R_i))$.

$\mathcal{X}$ Cayley séma, ha létezik $H \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{X})$, amely regulárisan hat X-en. Másképpen kifejezve minden bázis gráf (X, R_i) a H csoport Cayley gráfja. A H tetszőleges Γ Cayley gráfjának Weisfeiler-Lehmann lezártján a minimális olyan Cayley sémát értjük, amelyre igaz, hogy Γ megkapható a séma néhány bázis gráfjának uniójaként.

Ezt $\langle\langle\Gamma\rangle\rangle$-val jelölve igaz a következő:

$\mathrm{Aut}(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\langle\langle\Gamma\rangle\rangle)$.

E kapcsolat alapján Cayley gráfokkal kapcsolatos problémák visszavezethetőek Schur gyűrűkre. Ezzel kapcsolatban a következő eredményeket kaptuk:

(1) Muzychuckkal igazoltunk egy, A. Brouwertől származó, lokális Paley gráfokra vonatkozó sejtést.

(2) Adtunk egy formulát a C_{2^e} összes felbonthatatlan Schur gyűrűinek számára.

(3) Adtunk egy eljárást, amivel a C_{2^e} összes felbonthatatlan Schur gyűrűinek automorfizmus-csoportja meghatározható.

A $\mathcal{X}$ séma szemireguláris, ha létezik $H \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{X})$, amely szemiregulárisan hat X-en. Abban a speciális esetben, amikor $H = C_n$ és $r = 2$, a $\mathcal{X}$ sémát n-ed rendű biciklikus sémának is hívjuk.

E téren a következő eredményeket kaptuk:

(1) Bevezettünk r-ed rendű mátrixok algebráinak egy osztályát, melynek elemei az $\mathbf{R}[H]$ csoportalgebrából valók.

Ha a pályák száma r, akkor $\mathcal{X}$ ekvivalens lesz ezen algebrákkal.

$r = 1$ esetén pontosan a Schur gyűrűket kapjuk vissza.

(2) Szemireguláris csoporthatások invariáns partıcióit vizsgáltuk.

(3) Megadtuk az összes él-tranzitív Γ gráfot, ahol Γ rendelkezik egy Abel-féle szemireguláris automorfizmus csoporttal, amely a csúcsok halmazát két pályára bontja, és ezek egyetlen párosítással vannak összekötve.

(4) Egy S. Wilsontól származó, él-tranzitív, ún. rózsa ablak gráfokra vonatkozó sejtést igazoltunk.

(5) H. Wielandt $2p$-ed fokú primitív csoportokról szóló tételét általánosítottuk primitív biciklikus sémákra.

A fentiek mellett a következő dolgozatok születtek:

(1) Egy $\Gamma = \mathrm{Cay}(H, S)$ Cayley gráf a G csoport H feletti erős digrafikus ábrázolása, ha $G \cong \mathrm{Aut}(\Gamma)$, továbbá a $\sum_{g \in S} \chi(g)$ összegek különbözőek, ahol χ a H lineáris karaktere.

Frobenius csoportok feletti erős digrafikus ábrázolásokat vizsgáltunk.

Mengyán Csaba azt a kérdést vizsgálta, hogy adott méretű lefogó ponthalmazokból van-e q-ban polinomiálisnál több, vagy sem. Szisztematikusan megvizsgálva és néhány esetben általánosítva ismert konstrukciókat sok esetben sikerült ilyen értelemben finomítani az eredményeket. Talán a legtetszetősebb az az eredménye, hogy négyzetrendű síkokon a $[5q \log q, q\sqrt{q} - 2q]$ intervallum minden elemére több mint polinomiális olyan méretű nemizomorf minimális blokkoló halmaz létezik. Emellett vizsgálta azt az (eredetileg Gyárfás András által felvetett) kérdést is, hogy a q-adrendű sík illeszkedő pont-egyenes párjait hány erős reprezentánsrendszerre lehet felbontani. A sík magasabb dimenziós reprezentációját használva kiterjesztette Illés, Szőnyi és Wettl korábbi eredményeit egyrészt páros rendű síkokra, másrészt nem-négyzet rendű síkokra.

Nem-asszociatív kétváltozós struktúrák (kvázicsoportok és loopok) természetes módon fordulnak elő absztrakt illeszkedés-geometriai rendszerek (pl. projektív síkok) koordinátázásakor. Ilyeneket vizsgált **Nagy Gábor**, különös hangsúllyal az asszociativitás gyengített formájával rendelkező Moufang-féle és a (bal oldali) Bol-féle looposztályokban. Ezen vizsgálatok három módszer köré csoportosíthatók: a (véges) geometriai, a csoportelméleti és az absztrakt algebrai módszerek köré.

(Véges) geometriai módszerek: 2004-ben jelent meg P. Vojtěchovský-val közös survey jellegű *Octonions, simple Moufang loops and triality* c. dolgozatban az oktávok algebrájából megkonstruált klasszikus Moufang-loopot és annak geometriai tárgyalását tekinti át. Ezután Nagy Gábor olyan Moufang- és Bol-loopokkal kezdett fogalkozni, melyek az extraspeciális 2-csoportokhoz hasonlóan modulo egy 2-rendű centrális részloop, elemi Abel 2-csoportok. A Bol-féle esetben a *On the structure and number of small Frattini Bol 2-loops* dolgozatban az ilyen loopokra analitikus és csoportelméleti leírást ad, számukat alulról becsüli és véges geometriai eszközökkel példát mutat nagy ciklikus automorfizmus-csoporttal rendelkező példányokra. Mivel a leírás nem hatékony a speciális Moufang-esetben, ekkor egy másik, kódelméleti eredetű módszert használ a jellemzésre a *Direct construction of code loops* dolgozatban.

Csoportelméleti módszerek: 2004-ben M. Valsecchivel közösen írt *Splitting automorphisms and Moufang loops* dolgoztában **Nagy Gábor** harmadrendű felhasadó automorfizmussal rendelkező csoportokat vizsgált. Ilyenek Moufang-loopok kapcsán először S. Doro egyszerű Moufang-loopokat vizsgáló híres cikkében fordultak elő. **Nagy** és Valsecchi Khukhro eredményeit felhasználva megmutatta, hogy ezek a csoportok csak legfeljebb 3-lépésben nilpotens Moufang-féle 2- és 3-loopokat származtathatnak. Emellett a *The classification of Moufang 2-loops of maximal class* benyújtott kéziratában **Nagy Gábor** osztályozta a maximális nilpotencia-osztályú Moufang-féle 2-loopokat. Az osztályozás kulcsa, hogy egy ilyen loop mindig tartalmaz egy 4 indexű ciklikus normális részloopot. Ezután a 2-csoportok elméletéből ismert módszerekkel megmutatta, hogy minden 16-nál nagyobb 2-hatvány esetén pontosan 17 ilyen loop létezik.

Algebrai módszerek: Tisztán absztrakt algebrai módszereket használt **Nagy** és Valsecchi a Journal of Algebra-ban megjelent *On nilpotent Moufang loops with central associators* cikkükben. Itt olyan nilpotens Moufang-loopokat vizsgáltak, melyek modulo a centrumuk asszociatívak. A vizsgálat alapját egy fontos észrevétel szolgáltatta Moufang-loopok asszociátor részloopja és nukleusza között. (Ezek a csoportelméletből ismert kommutatátor részcsoport és centrum nem-asszociatív megfelelői.) Ebből az is kiderült, hogy ha $p > 3$, akkor a 2-lépésben nilpotens Moufang p-loopok asszociatívok. A cikkben teljesen osztályozták a p^5 ($p > 3$) rendű valódi Moufang-loopokat és egy nagyon általános konstrukciót is megadtak.

Végezetül, megemlítjük a *The Moufang Loops of Order 64 and 81* kéziratot, melyben **Nagy** és Vojtěchovský Moufang-loopok centrális bővítéseit vizsgálja. Egy ezekre épülő hatékony kereső algoritmus segítségével osztályozzák a 64-ed és 81-ed rendű valódi Moufang-loopokat. A számításokat a kettejük által 2003 óta fejlesztett LOOPS programcsomag segítségével programozták le. A csomag a GAP komputeralgebrai rendszerhez kapcsolódik, ahhoz hivatalosan *deposit package* státuszban társítva. A referált csomag státuszhoz szükséges eljárás folyamatban van.

Sziklai Péter másodrendű kúpok részleges kúpszeletnyalábjainak kiegészíthetőségét vizsgálta. Kúpszeletnyaláboknak számos alkalmazása van véges geometriákban (transzlációsíkok, általánosított négyszögek, BLT-halmazok). A cikk arra ad rövid bizonyítást, hogy ha csak $c\sqrt{q}$ kúpszelet hiányzik, akkor a részleges nyaláb kiegészíthető teljes kúpszeletnyalábbá. Ezt az eredményt sikerült bizonyos, másodfokúnál magasabb fokú görbére emelt kúpokra is kiterjeszteni.

Sziklai Péter Yves Edellel és Leo Stormeval konkrét projektív terekben megjavítják a maximális süveg méretére eddig ismert korlátot. **Sziklai Péter**, **Weiner Zsuzsa**, Sandy Ferret-tel és Leo Storme-val közösen megmutatták, hogy $\mathrm{PG}(n, q)$-beli, $q = p^h$, p prím, nem túl nagy méretű minimális, súlyozott, t-szeres, k-dimenziós altereket lefogó ponthalmazok olyanok, hogy minden k-dimenziós alteret t modulo p pontban metszenek. Ez az eredmény fontos szerepet játszhat ezen lefogó ponthalmazok karakterizálásakor. Az eredmény Szőnyi Tamás és Weiner Zsuzsa korábbi, egyszeres lefogó ponthalmazokról szóló hasonló eredményét általánosítja.

Sziklai Péter $\mathrm{AG}(3, p)$-beli, p^2 pontú ponthalmaz által meghatározott irányok számára bizonyít korlátokat, majd Gács egy eredményét felhasználva megmutatja, hogy a kevés irányt meghatározó ponthalmazok hengeres szerkezetűek

Sziklai Péter foglalkozott algebrai görbékkel is. Azt a sejtést fogalmazza meg, hogy egy GF(q) feletti n-edfokú síkgörbének, ha nem tartalmaz lineáris komponenst, legfeljebb $(n-1)q+1$ pontja lehet (multiplicitás nélkül számolva). A sejtést sok részeset támasztja alá, a triviális korlát $(n-1)q+n$. A cikkben a "félút"-ig sikerül eljutni, az $(n-1)q+[n/2]$, mint felső korlát igazolásáig

Sziklai Péter fontos eredményeket ért el PG$(2,q)$ kisméretű, azaz $3(q+1)/2$-nél kevesebb pontú lefogó ponthalmazaira. Itt az a régi nagy sejtés, hogy az ilyen lefogóhalmazok GF(q) egy résztestje felett lineárisak. A cikk az alábbi tételt igazolja.

Tétel *$PG(2,q)$ bármely kisméretű lefogó ponthalmazára teljesül, hogy minden egyenesmetszete 1 mod p^e méretű, ahol $GF(p^e)$ résztest, és majdnem minden egyenes $GF(p^e)$-lineáris ponthalmazban metsz.*

Boros Endre, **Szőnyi Tamás** és Tichler Krisztián véges (nem feltétlen desarguesi) projektív síkok definiáló halmazait vizsgálta. Megmutatták hogy a sík egyeneseinek egy $22q\log q$ elemű véletlen halmaza nagy valószínűséggel definiáló halmaz. Részben szintén a véletlen módszert használva megadtak kisméretű sűrű halmazokat, valamint sűrű halmazok segítségével explicit konstrukciót adtak q^2-nél nagyságrendileg kevesebb egyenest tartalmazó definiáló halmazokra. Megjavították a legkisebb definiáló halmaz méretére ismert legjobb alsó becslést is.

Szőnyi Tamás Cathy Bakerrel, Julia Brownnal és Anthony Bonatoval az n-e. c. tulajdonságnak eleget tevő gráfokat vizsgált. Véges affin síkok segítségével ilyen gráfok egy elég bő osztályát konstruálták. A véletlen módszerrel megmutatták, hogy a kapott gráfok majdnem mindegyike n-e. c. tulajdonságú $n=(1/2-\varepsilon)\log q$-ra (a pontok száma q^2). Ugyanakkor a gráfosztály tartalmaz olyan gráfokat is, amelyekre a 3-e. c. tulajdonság igaz, de a 4-e. c. nem. A gráfosztály minden eleme 3-e. c., így az n-re vonatkozó becslés éles.

Aart Blokhuis, Lovász László, Leo Storme és **Szőnyi Tamás** elkészítették a testre épített síkok többszörös lefogó ponthalmazairól szóló dolgozatuk remélhetőleg végleges változatát. Ennek fő eredménye, hogy a kis t-szeres lefogó ponthalmazokat minden egyenes t modulo p pontban metszi, ahol p a koordinátatest karakterisztikája. Felhasználva ezt az eredményt, megjavítják a t-szeres lefogó ponthalmazokra vonatkozó eddig ismert becsléseket is.

A szintén előkészületben lévő [11] dolgozatban pedig **Szőnyi Tamás** és

Weiner Zsuzsa $PG(2,q)$ páros halmazainak (olyan ponthalmazok, melyek minden egyenest páros sok pontban metszenek) illetve nem túl nagy méretű lefogó ponthalmazainak (olyan ponthalmazok, melyek minden egyenest metszenek) stabilitását vizsgálják, vagyis azt hogy egy olyan ponthalmaz, mely majdnem minden egyenest páros sok pontban metsz, illetve metsz előáll-e, egy páros halmazból illetve lefogó ponthalmazból úgy, hogy abból néhány pontot törlünk illetve ahhoz néhány pontot hozzáadunk. Megjavították a kézirat páros halmazokra vonatkozó részét. Ezek olyan halmazok, amelyek minden egyenest páros sok pontban metszenek. Az következőt mutatták meg.

Tétel *$PG(2,q)$ (q páros) olyan ponthalmaza, amelynek $z < ([\sqrt{q}]+1)(q+1-[\sqrt{q}])$ páratlan szelője van, $[z/(q+1)]$ pont módosításával (törlésével vagy hozzáadásával) páros halmazzá tehető.*

A tétel így már éles, ha q négyzetszám. Ilyenkor Segre ívek beágyazásáról szóló híres tételének általánosítását kapjuk.

Weiner Zsuzsa olyan $\mathrm{PG}(n,q^2)$-beli, $3(q^{n-k}+1)/2$-nél kisebb ponthalmazokat karakterizál, mely minden k-dimenziós alteret 1 modulo q pontban metsz. Az ilyen halmazok minimális lefogó ponthalmazok k-dimenziós alterekre nézve. Így a fenti eredményt felhasználva sikerült $\mathrm{PG}(n,q^2)$ nem túl nagy méretű lefogó ponthalmazait karakterizálni.

Weiner Zsuzsa Simeon Ball-lal közösen 'An Introduction to Finite Geometry' címmel egyetemi jegyzetet írt.

Az irodalomjegyzék olyan dolgozatokat, kéziratokat tartalmaz, amelyeket még nem fogadtak el, a többit a jelentéshez kapcsolódóan az internetes felületen lehet megtalálni.

Hivatkozások

[1] V. Fack, Sz. L. Fancsali, L. Storme, G. Van de Woorde, J. Winne, Small weight codewords in the codes arising from Desarguesian projective planes, *Designs, Codes and Cryptography*, benyújtva

[2] I. Kovács, A. Malnič, D. Marušič, Š. Miklavič Transitive group actions: (im)primitivity and semiregular subgroups, benyújtva

[3] I. Kovács, D. Marušič and M. Muzychuk, On primitive bicirculant association schemes, kézirat

[4] I. Kovács, On automorphism group of indecomposable S-rings over cyclic 2-groups, kézirat

[5] Cs. Mengyán, On the number of pairwise non-isomorphic minimal blocking sets in PG$(2, q)$, benyújtva, *Designs, Codes, and Cryptography*

[6] Cs. Mengyán, Note on partitioning the flags of PG$(2, q)$ into strong representative systems, kézirat

[7] G. P. Nagy, P. Vojtechovsky, LOOPS: Computing with quasigroups and loops in GAP. Version 1.4. (2007) http://www.gap-system.org/Packages/loops.html 2007

[8] A. Gács, T. Szőnyi, Random constructions and density results, *Designs, Codes and Cryptography*, benyújtva.

[9] S. Ball, A. Gács, P. Sziklai, On linear combinations of permutation polynomials that are permutation polynomials, *J. of Combinatorial Theory Ser. A*, benyújtva.

[10] S. Ball, Zs. Weiner, *An Introduction to Finite Geometry*, kézirat

[11] Zs. Weiner, T. Szőnyi, On stability theorems in finite geometry, kézirat

[12] P. Sziklai, On small blocking sets and their linearity, *J. Combin. Th. Ser A.*, benyújtva.